

2020

MATHEMATICS (General)

Paper Code : II - A & B

[New Syllabus]

Important Instructions for Multiple Choice Question (MCQ)

- Write Subject Name and Code, Registration number, Session and Roll number in the space provided on the Answer Script.

Example : Such as for Paper III-A (MCQ) and III-B (Descriptive).

Subject Code :

III	A	&	B
-----	---	---	---

Subject Name :

--

- Candidates are required to attempt all questions (MCQ). Below each question, four alternatives are given [i.e. (A), (B), (C), (D)]. Only one of these alternatives is 'CORRECT' answer. The candidate has to write the Correct Alternative [i.e. (A)/(B)/(C)/(D)] against each Question No. in the Answer Script.

Example — If alternative A of 1 is correct, then write :

1. — A

- There is no negative marking for wrong answer.

মাল্টিপল চয়েস প্রশ্নের (MCQ) জন্য জরুরী নির্দেশাবলী

- উত্তরপত্রে নির্দেশিত স্থানে বিষয়ের (Subject) নাম এবং কোড, রেজিস্ট্রেশন নম্বর, সেশন এবং রোল নম্বর লিখতে হবে।

উদাহরণ — যেমন Paper III-A (MCQ) এবং III-B (Descriptive)।

Subject Code :

III	A	&	B
-----	---	---	---

Subject Name :

- পরীক্ষার্থীদের সবগুলি প্রশ্নের (MCQ) উত্তর দিতে হবে। প্রতিটি প্রশ্নে চারটি করে সম্ভাব্য উত্তর, যথাক্রমে (A), (B), (C) এবং (D) করে দেওয়া আছে। পরীক্ষার্থীকে তার উত্তরের স্বপক্ষে (A)/(B)/(C)/(D) সঠিক বিকল্পটিকে প্রশ্ন নম্বর উল্লেখসহ উত্তরপত্রে লিখতে হবে।

উদাহরণ — যদি 1 নম্বর প্রশ্নের সঠিক উত্তর A হয় তবে লিখতে হবে :

1. – A

- ভুল উত্তরের জন্য কোন নেগেটিভ মার্কিং নেই।

Paper Code : II-A

Full Marks : 50

Time : One Hour

Choose the correct answer.

Each question carries 2 marks.

1. If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$. Then the value of $I_{n+2} + I_n$ is —

(A) $\frac{1}{n}$

(B) $\frac{1}{(n+1)}$

(C) $-\frac{2}{(n+1)}$

(D) $\frac{1}{(n-1)}$

১। যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$ তাহলে $I_{n+2} + I_n$ এর মান হল —

(A) $\frac{1}{n}$

(B) $\frac{1}{(n+1)}$

(C) $-\frac{2}{(n+1)}$

(D) $\frac{1}{(n-1)}$

2. The value of the integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^9 dx$ is —

- (A) 2
- (B) 9
- (C) 5
- (D) 12

২। $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^9 dx$ এই সমাকলনটির মান হল —

- (A) 2
- (B) 9
- (C) 5
- (D) 12

3. The value of the integral $\int_{-1}^2 |1-x| dx$ is —

- (A) 2
- (B) 0
- (C) -2
- (D) 5/2

৩। $\int_{-1}^2 |1-x| dx$ এই সমাকলনটির মান হল —

- (A) 2
- (B) 0
- (C) -2
- (D) 5/2

4. The differential equation of the family of circles touching the y -axis at the origin is —

(A) $x^2 + y^2 - 2xy \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$

(B) $x^2 + y^2 + 2xy \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$

(C) $x^2 - y^2 + 2xy \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$

(D) $x^2 - y^2 - 2xy \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$

৪। y অক্ষকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করে এমন বৃত্তসমূহের অবকল সমীকরণটি হল —

(A) $x^2 + y^2 - 2xy \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$

(B) $x^2 + y^2 + 2xy \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$

(C) $x^2 - y^2 + 2xy \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$

(D) $x^2 - y^2 - 2xy \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$

5. An integrating factor of $x \frac{dy}{dx} + (3x + 1)y = xe^{-2x}$ is —

(A) xe^{3x}

(B) $3xe^x$

(C) xe^x

(D) x^3e^x

৫। $x \frac{dy}{dx} + (3x+1)y = xe^{-2x}$ এর ইন্টিগ্রেশন ফ্যাক্টর হল —

(A) xe^{3x}

(B) $3xe^x$

(C) xe^x

(D) x^3e^x

6. The general solution of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ is —

(A) $c_1e^x + c_2e^{3x} - xe^x$

(B) $c_1e^x + c_2e^{2x} - x^2e^x$

(C) $c_1e^x + c_2e^{3x} - x^3e^x$

(D) $c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$

৬। $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ অবকল সমীকরণটির সাধারণ সমাধানটি হল —

(A) $c_1e^x + c_2e^{3x} - xe^x$

(B) $c_1e^x + c_2e^{2x} - x^2e^x$

(C) $c_1e^x + c_2e^{3x} - x^3e^x$

(D) $c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$

7. The probability that at least one of the events A or B occurs is 0.6. If A and B occurs simultaneously with probability 0.2, then $P(\bar{A}) + P(\bar{B})$ is —

- (A) 1.2
- (B) 0.2
- (C) 0.8
- (D) 1.0

৭। A অথবা B অন্ততপক্ষে একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা হল 0.6। যদি A এবং B একসাথে ঘটর সম্ভাবনা হয় 0.2 তাহলে $P(\bar{A}) + P(\bar{B})$ -এর মান হল —

- (A) 1.2
- (B) 0.2
- (C) 0.8
- (D) 1.0

8. If x and y are uncorrelated random variables, then $\text{var}(ax + by)$ is equal to —

- (A) $a \text{ var}(x) + b \text{ var}(y)$
- (B) $a^2 \text{ var}(x) + b^2 \text{ var}(y)$
- (C) $a \text{ var}(x) + b \text{ var}(y) + 2ab$
- (D) $a^2 \text{ var}(x) + b^2 \text{ var}(y) + 2ab$

৮। যদি x এবং y অসম্পৃক্ত র্যান্ডম চলরাশি হয়, তাহলে $\text{var}(ax + by)$ এর মান হবে —

- (A) $a \text{ var}(x) + b \text{ var}(y)$
- (B) $a^2 \text{ var}(x) + b^2 \text{ var}(y)$
- (C) $a \text{ var}(x) + b \text{ var}(y) + 2ab$
- (D) $a^2 \text{ var}(x) + b^2 \text{ var}(y) + 2ab$

9. Let X have a binomial distribution with parameters n and p , where n is an integer greater than 1 and $0 < p < 1$. If $P(X = 0) = P(X = 1)$, then the value of p is —

(A) $\frac{1}{n-1}$

(B) $\frac{n}{n+1}$

(C) $\frac{1}{n+1}$

(D) $\frac{1}{1+n^{n-1}}$

৯। n এবং p প্যারামিটার সহ X একটি দ্বিপদ ডিস্ট্রিবিউশন অনুসরণ করে যেখানে n , 1 থেকে বড় পূর্ণসংখ্যা 1 এবং $0 < p < 1$ । যদি $P(X = 0) = P(X = 1)$ হয়, তবে p এর মান হবে —

(A) $\frac{1}{n-1}$

(B) $\frac{n}{n+1}$

(C) $\frac{1}{n+1}$

(D) $\frac{1}{1+n^{n-1}}$

10. Which one of the following is not a measure of central tendency ?

- (A) Mean
- (B) Median
- (C) Mode
- (D) Skewness

১০। নিম্নলিখিত কোনটি কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ নয় ?

- (A) Mean
- (B) Median
- (C) Mode
- (D) Skewness

11. If $\frac{5}{6}$ is represented approximately by 0.8333, then the relative percentage error is —

- (A) 0.04%
- (B) 0.02%
- (C) 0.004%
- (D) 0.025%

১১। $\frac{5}{6}$ -এর মান আনুমানিক 0.8333 দ্বারা নির্ণীত হলে, আপেক্ষিক শতাংশ ত্রুটি হবে —

- (A) 0.04%
- (B) 0.02%
- (C) 0.004%
- (D) 0.025%

12. The value of $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) x^2$, taking $h = 1$ is —

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 1
- (D) 4

১২। $h = 1$ ধরে, $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) x^2$ -এর মান হবে —

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 1
- (D) 4

13. The value of the integral $\int_0^3 (2x - x^2) dx$, taking 6 intervals by Simpson's $\frac{1}{3}$ rd rule is —

- (A) -0.125
- (B) 0
- (c) 0.125
- (D) 0.140

১৩। 6 অন্তরালের জন্য $\int_0^3 (2x - x^2) dx$ সমাকলনটির সিম্পসনের এক তৃতীয়াংশ নিয়ম দ্বারা নির্ণীত মান হবে —

- (A) -0.125
- (B) 0
- (C) 0.125
- (D) 0.140

14. An iterative scheme for finding the square root of a positive number N by using Newton-Raphson method is —

- (A) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(2x_n + \frac{N}{x_n} \right)$
- (B) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{x_n}{N} \right)$
- (C) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{N}{x_n} \right)$
- (D) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{N}{x_n^2} \right)$

১৪। নিউটন-র্যাফসন পদ্ধতিটি ব্যবহার করে একটি ধনাত্মক সংখ্যা N -এর বর্গমূলের মান বের করার জন্য একটি পুনরাবৃত্ত পদ্ধতি হল —

$$(A) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(2x_n + \frac{N}{x_n} \right)$$

$$(B) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{x_n}{N} \right)$$

$$(C) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{N}{x_n} \right)$$

$$(D) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{N}{x_n^2} \right)$$

15. The number of basic feasible solution(s) of the equation $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$ is —

$$(A) \quad 0$$

$$(B) \quad 1$$

$$(C) \quad 2$$

$$(D) \quad 3$$

১৫। $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$ সমীকরণটির প্রাথমিক সম্ভাব্য সমাধানের সংখ্যা হল —

$$(A) \quad 0$$

$$(B) \quad 1$$

$$(C) \quad 2$$

$$(D) \quad 3$$

16. Given the LPP :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 10x_1 + 15x_2 \\ \text{subject to } x_1 + x_2 &\geq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

The optimal value of the objective function will be —

- (A) 30
- (B) 20
- (C) 50
- (D) 45

১৬। প্রদত্ত LPP টিতে :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 10x_1 + 15x_2 \\ \text{subject to } x_1 + x_2 &\geq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

উদ্দেশ্য ফাংশন (objective function)-এর সর্বোত্তম মান হবে —

- (A) 30
- (B) 20
- (C) 50
- (D) 45

17. If the k -th constraint of a primal problem is an equation, then the k -th dual variable will be —

- (A) non-negative
- (B) non-positive
- (C) unrestricted in sign
- (D) zero

১৭। যদি একটি প্রাইমাল সমস্যার k -তম সীমাবদ্ধতা একটি সমীকরণ হয়, তাহলে k -তম ডুয়াল চলরাশি হবে —

- (A) ঋণাত্মক নয়
- (B) ধনাত্মক নয়
- (C) চিহ্নের উপর অনিয়ন্ত্রিত
- (D) শূন্য

18. The number of extreme points of the convex set $S = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ is —

- (A) 0
- (B) 2
- (C) 4
- (D) infinite

১৮। $S = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ উত্তল সেটটির চরম বিন্দুর সংখ্যা হল —

- (A) 0
- (B) 2
- (C) 4
- (D) অসীম

19. A particle describes a simple harmonic motion in a line with 2cm as its amplitude. Its velocity when passing through the centre of oscillation is 12 cm/sec. Then its time period is —

(A) $\pi/3$

(B) $\pi/4$

(C) $\pi/6$

(D) $\pi/8$

১৯। 2cm বিস্তার সহ একটি বস্তুকণা একটি সরলরেখায় সরল দোলগতিতে গতিশীল। দোলনের কেন্দ্র দিয়ে যাওয়ার সময় ইহার গতিবেগ হয় 12 cm/sec। তাহলে ইহার দোলনকাল হবে —

(A) $\pi/3$

(B) $\pi/4$

(C) $\pi/6$

(D) $\pi/8$

20. A force acting on a body of mass 5 lb. changes its velocity from 30 miles/hr to 45 miles/hr. Then the impulse of the force is —

(A) 120 poundal sec

(B) 110 poundal sec

(C) 90 poundal sec

(D) 100 poundal sec

২০। 5 lb. ভরের একটি বস্তুর উপর একটি বল প্রয়োগ করলে, ইহার গতিবেগ 30 miles/hr থেকে 45 miles/hr পরিবর্তিত হয়। তাহলে বলের impulse হবে —

- (A) 120 পাউন্ডাল সেকেন্ড
- (B) 110 পাউন্ডাল সেকেন্ড
- (C) 90 পাউন্ডাল সেকেন্ড
- (D) 100 পাউন্ডাল সেকেন্ড

21. A particle describes the parabola $p^2 = ar$ under a force which is always directed towards its focus. Then the law of force is given by —

- (A) $P \propto r^{-3}$
- (B) $P \propto r^{-2}$
- (C) $P \propto r^{-4}$
- (D) $P \propto r^{-1}$

২১। একটি কণা একটি বলের অধীনে অধিবৃত্ত $p^2 = ar$ কক্ষপথে গতিশীল যা সর্বদা অধিবৃত্তের নাভির অভিমুখী ক্রিয়ামান, তাহলে বলের সূত্র হবে —

- (A) $P \propto r^{-3}$
- (B) $P \propto r^{-2}$
- (C) $P \propto r^{-4}$
- (D) $P \propto r^{-1}$

22. A wheel makes 200 revolutions per hour. Then its angular velocity in radians per second is —

- (A) $\pi/9$ radians
- (B) $\pi/6$ radians
- (C) $\pi/3$ radians
- (D) $\pi/12$ radians

২২। একটি চাকা প্রতি ঘণ্টায় 200 বার ঘোরে। তাহলে তার কৌণিক বেগ (angular velocity) রেডিয়ান প্রতি সেকেন্ডে হবে —

- (A) $\pi/9$ রেডিয়ান
- (B) $\pi/6$ রেডিয়ান
- (C) $\pi/3$ রেডিয়ান
- (D) $\pi/12$ রেডিয়ান

23. The general solution of $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x \frac{dy}{dx} + 9y = 0$ is —

- (A) $(c_1 + c_2x)e^{3x}$
- (B) $(c_1 + c_2 \ln x)x^3$
- (C) $(c_1 + c_2x)x^3$
- (D) $(c_1 + c_2 \ln x)e^{x^3}$

২৩। $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x \frac{dy}{dx} + 9y = 0$ অবকল সমীকরণটির সাধারণ সমাধানটি হল —

(A) $(c_1 + c_2x)e^{3x}$

(B) $(c_1 + c_2 \ln x)x^3$

(C) $(c_1 + c_2x)x^3$

(D) $(c_1 + c_2 \ln x)e^{x^3}$

24. If $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx$, ($n \geq 1$), then —

(A) $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} + n(n-1)I_{n-1}$

(B) $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$

(C) $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + n(n-1)I_{n-2}$

(D) $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-1}$

২৪। যদি $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx$, ($n \geq 1$) হয়, তাহলে —

(A) $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} + n(n-1)I_{n-1}$

(B) $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$

(C) $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + n(n-1)I_{n-2}$

(D) $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-1}$

25. The numerical value obtained by applying the two-point trapezoidal rule to the

integral $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ is —

(A) $\frac{1}{2}(\ln 2 + 1)$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$

(D) $\frac{1}{2} \ln 2$

২৫। দুই বিন্দু ট্র্যাপিজয়ডাল সূত্র প্রয়োগ করলে $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ সমাকলনটির সংখ্যাগত মান হবে —

(A) $\frac{1}{2}(\ln 2 + 1)$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$

(D) $\frac{1}{2} \ln 2$

2020

MATHEMATICS (General)

Paper Code : II - B

[New Syllabus]

Full Marks : 100

Time : Three Hours

*The figures in the margin indicate full marks.
Notations and symbols have their usual meanings.*

**Group - A
(20 Marks)**

Answer any *four* questions.

5×4=20

1. Evaluate $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

2. Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx$.

3. Show that the integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \log \sin x dx$ converges and find its value.

4. Evaluate $\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + 2y) dx dy$

5. Show that $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{256}$

6. Find the area of the region bounded by $y^3 = x$, the y -axis, $y = 3$ and $y = 6$.

Group - B
(10 Marks)

7. Answer any *two* questions : 5×2=10

(a) Show that the family of confocal conics

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

is self-orthogonal, where a, b are constants and λ is a parameter.

(b) Solve the differential equation $x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0$

(c) Solve the differential equation $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{3x}$. 2+3

Group - C
(20 Marks)

8. Answer any *four* questions : 5×4=20

(a) For two arbitrary events A and B , show that

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

(b) Determine the value of the constant k such that

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & \text{for } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

is a possible probability density function. Compute $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$.

(c) For any two random variables X and Y , prove that

$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

- (d) If X is a random variable, find the correlation coefficient between $2X - 3$ and $X + 2$.
- (e) If the lines of regression of y on x and x on y are respectively $3x + 2y = 26$ and $6x + y = 31$, find the correlation coefficient between x and y .
- (f) For random variables X and Y with the same mean, the two regression equations are $Y = aX + b$ and $X = \alpha Y + \beta$, where a, b, α and β are constants. Show that $\frac{b}{\beta} = \frac{1-a}{1-\alpha}$.

Group - D
(15 Marks)

9. Answer any *three* questions : 5×3=15

- (a) If the third order differences of $f(x)$ is constant and $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 8$ and $f(3) = 27$, find $f(4)$ using difference table.
- (b) Find the polynomial of the least degree which attains the prescribed values of the given points.

x	0	1	2	3
y	3	6	11	18

- (c) By using Trapezoidal rule, evaluate the value of $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ taking six equal sub-intervals of $[0,1]$, correct upto four decimal places.
- (d) Use Simpson's $\frac{1}{3}$ -rd rule to evaluate the value of $\int_0^6 \frac{dx}{(1+x)^2}$ taking six equal sub-intervals of $[0,6]$, correct upto three decimal places.

- (e) Find the smallest positive root of the equation $3x^3 - 9x^2 + 8 = 0$, correct upto four decimal places, using Newton-Raphson method.

Group - E
(15 Marks)

10. Answer any *three* questions :

5×3=15

- (a) Find the basic feasible solution of the following system :

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 8$$

$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3$$

where $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

- (b) Solve by the graphical method :

$$\text{Maximize } z = x + 3y$$

$$\text{subject to } 3x + 6y \leq 8$$

$$5x + 2y \leq 10$$

$$x, y \geq 0$$

- (c) Solve by the simplex method :

$$\text{Maximize } z = 2x - 3y$$

$$\text{subject to } 2x + 5y \geq 10$$

$$3x + 8y \leq 24$$

$$x, y \geq 0$$

- (d) Write down the dual of the following L.P.P. :

$$\text{Maximize } z = 2x + 5y + 6w$$

$$\text{subject to } 5x + 6y - w = 3,$$

$$-2x + y + 4w \leq 4,$$

$$x - 5y + 3w \leq 1,$$

$$-3x - 3y + 7w \leq 6,$$

$$x, y, w \geq 0.$$

(e) Find the optimal assignment for a problem with the following cost matrix :

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
J_1	8	4	2	6	1
J_2	0	9	5	5	4
J_3	3	8	9	2	6
J_4	4	3	1	0	3
J_5	9	5	8	9	5

Group - F
(20 Marks)

Answer question no. 11 and any *one* from the rest.

11. Two unequal masses connected by a string hang over a pulley; if the sum of the masses is a constant, show that the greater the acceleration, the less is the tension in the string. 5
12. (a) An engine working at a constant rate H draws a load of mass M against a resistance R . Show that maximum speed attained is $\frac{H}{R}$ and time taken to attain half of this speed is $\frac{MH}{R^2} \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right)$. 7
- (b) A gun of mass M fires a shell of mass m horizontally and the energy of the explosion is such as would be sufficient to project the shell vertically to height h . Show that the velocity of recoil of the gun is $\sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}}$. 8
13. (a) A smooth sphere of mass m impinges on another of mass M at rest, the direction of motion making an angle of 45° with the line of centres at the moment of impact. If the coefficient of restitution is $\frac{1}{2}$, show that the direction of motion of the sphere of mass m is turned through an angle $\tan^{-1} \left(\frac{3M}{M+4m} \right)$ 8

- (b) With usual notations obtain the equation of motion for a central orbit in the form $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$, when the central force is governed by inverse square law, obtain the expressions for eccentricity of the orbit. 7

বঙ্গনুবাদ

Group - A

(২০ নম্বর)

যে কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫×৪=২০

১। মান নির্ণয় কর : $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

২। মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx$.

৩। দেখাও $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \log \sin x dx$ সমাকলটি convergent এবং এর মান নির্ণয় কর।

৪। মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + 2y) dx dy$

৫। প্রমাণ কর : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{256}$

৬। $y^3 = x$, y -অক্ষ, $y = 3$ এবং $y = 6$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Group - B

(১০ নম্বর)

৭। যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫×২=১০

(a) দেখাও যে, নিম্নলিখিত confocal conics-এর পরিবারটি self-orthogonal :

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

যেখানে a, b হল ধ্রুবক এবং λ হল একটি প্যারামিটার।

(b) সমাধান কর : $x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0$.

(c) সমাধান কর : $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{3x}$.

Group - C

(২০ নম্বর)

৮। যে কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫×৪=২০

(a) যে কোন দুটো ঘটনা A ও B এর জন্য; প্রমাণ কর যে —

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

(b) ধ্রুবক k -এর মান নির্ণয় কর যার জন্য —

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & \text{যদি } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{অন্যত্র} \end{cases}$$

হল একটি possible probability density function. $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

(c) যে কোনো দুটো random variables X ও Y এর জন্য, প্রমাণ কর যে —

$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

- (d) যদি X একটি random variables হয়, তবে $2X-3$ ও $X+2$ এর মধ্যে correlation coefficient বের কর।
- (e) যদি x -এর ওপর y -এর এবং y -এর ওপর x -এর regression line-গুলি যথাক্রমে $3x+2y=26$ ও $6x+y=31$ হয়, তবে x ও y -এর মধ্যে correlation coefficient বের কর।
- (f) একই mean এর random variables X ও Y এর জন্য regression equations গুলি যথাক্রমে $Y=aX+b$ ও $X=\alpha Y+\beta$, যেখানে a, b, α, β গুলি হল ধ্রুবক।
দেখাও যে, $\frac{b}{\beta} = \frac{1-a}{1-\alpha}$.

Group - D

(১৫ নম্বর)

৯। যে কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫×৩=১৫

- (a) যদি $f(x)$ -এর তৃতীয় ক্রমের differences ধ্রুবক হয় এবং $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=8$ এবং $f(3)=27$, difference table ব্যবহার করে $f(4)$ -এর মান বের কর।
- (b) নিম্নলিখিত ছক তালিকার সাহায্য ন্যূনতম মাত্রার বহুপদ এর মান বের কর :

x	0	1	2	3
y	3	6	11	18

- (c) Trapezoidal rule ব্যবহার করে $[0, 1]$ এর সমান ছয়টি sub-intervals নিয়ে চার দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.
- (d) Simpson's $\frac{1}{3}$ rd rule ব্যবহার করে $[0, 6]$ এর সমান ছয়টি sub-intervals নিয়ে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর : $\int_0^6 \frac{dx}{(1+x)^2}$.

- (e) Newton-Raphson পদ্ধতি ব্যবহার করে চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নিম্নলিখিত equation টির ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক বীজ-এর মান নির্ণয় কর : $3x^3 - 9x^2 + 8 = 0$.

Group - E

(১৫ নম্বর)

১০। যে কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫×৩=১৫

- (a) নিম্নলিখিত সিস্টেমটির basic feasible solution নির্ণয় কর :

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 8$$

$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3$$

যেখানে $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

- (b) Graphical method-এর সাহায্যে সমাধান কর :

$$\text{Maximize } z = x + 3y$$

$$\text{subject to } 3x + 6y \leq 8$$

$$5x + 2y \leq 10$$

$$x, y \geq 0$$

- (c) Simplex method-এর সাহায্যে সমাধান কর :

$$\text{Maximize } z = 2x - 3y$$

$$\text{subject to } 2x + 5y \geq 10$$

$$3x + 8y \leq 24$$

$$x, y \geq 0$$

- (d) নিম্নলিখিত L.P.P. টির dual লেখ :

$$\text{Maximize } z = 2x + 5y + 6w$$

$$\text{subject to } 5x + 6y - w = 3,$$

$$-2x + y + 4w \leq 4,$$

$$x - 5y + 3w \leq 1,$$

$$-3x - 3y + 7w \leq 6,$$

$$x, y, w \geq 0.$$

(e) নিম্নলিখিত cost matrix-টির optimal assignment-এর মান নির্ণয় কর :

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
J_1	8	4	2	6	1
J_2	0	9	5	5	4
J_3	3	8	9	2	6
J_4	4	3	1	0	3
J_5	9	5	8	9	5

Group - F

(২০ নম্বর)

11 নং প্রশ্নের উত্তর দাও এবং বাকিগুলো থেকে যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

১১। দুটি অসম ভর একটি সুতোর সাহায্যে যুক্ত হয়ে একটি কপিকলের উপর ঝুলছে। যদি ভরদুটির যোগফল ধ্রুবক হয়, দেখাও যে, ত্বরণ যত বেশী হবে, সুতোর টান তত কম হবে। ৫

১২। (a) একটি যন্ত্র H -ধ্রুবক হারে কাজ করে R বাধার বিপরীতে M -ভরের একটি বস্তুকে টানে। দেখাও যে, সর্বাধিক যে গতি অর্জন করা হয় তা হল $\frac{H}{R}$ এবং এই গতির অর্ধেক অর্জন করতে যে সময় লাগে তা হল $\frac{MH}{R^2} \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right)$ । ৭

(b) M -ভরের একটি কামান অনুভূমিকভাবে m -ভরের একটি গোলা নিক্ষেপ করে এবং বিস্ফোরণের সময় উৎপন্ন শক্তি ঐ গোলাকে h -উচ্চতা পর্যন্ত উৎক্ষিপ্ত করতে যথেষ্ট।

দেখাও যে, কামানটির পশ্চাদপসারণের গতিবেগ হয় $\sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}}$ । ৮

১৩. (a) বিশ্রামরত অবস্থায় m -ভরের একটি গোলক M -ভরের অন্য আরেকটিকে ধাক্কা দেয়, গতিপথের দিকটি, ধাক্কার মুহূর্তে, কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। যদি restitution সহগের মান $\frac{1}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে m ভরের গোলকটির গতিপথের দিকটি $\tan^{-1}\left(\frac{3M}{M+4m}\right)$ আবর্তিত হয়। ৮

(b) প্রচলিত রাশি-প্রতীকের সাহায্যে কেন্দ্রীয় কক্ষপথের গতির সমীকরণটি $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$ আকারে প্রতিষ্ঠা কর, যখন কেন্দ্রীয় শক্তি বিপরীত বর্গ সূত্র দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়, কক্ষপথটির উৎকেন্দ্রতার প্রকাশ নির্ণয় কর। ৭